1. QUADRATS D'UN TAULER D'ESCACS

He llegit a un llibre de matemàtiques que un tauler d'escacs té 204 quadrats. Creus que és certa aquesta afirmació?.

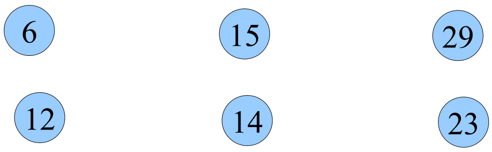
Quants rectangles, de costats paral·lels als costats del tauler, deu tenir?.

2. UN NOMBRE CURIÓS

Un nombre acaba en 2. Canviant de lloc aquesta xifra i posant-la al principi, resulta un nombre que és el doble del nombre inicial. Quin és el nombre inicial?

3. ELS OUS DE GALLINA I D'ÀNEDA

Un venedor té davant seu sis cistelles d'ous. Cada una té ous de dos tipus, de gallina o d'àneda. Cada cistella té el nombre d'ous que s'indiquen



El venedor diu, senyalant una cistella que no acabo de saber quina és exactament: "*si venc aquesta cistella, em quedarà el doble d'ous de gallina que d'àneda*".

Podries ajudar-me a esbrinar de quina cistella es tracta?

4. ANGLES D'UN POLÍGON CONVEX

Què sumen els n angles d'un polígon convex de n costats?. I què sumaran, per tant, els exteriors?.

Què val cada un dels angles si el polígon és regular?

5. ELS TRIGÈNIMS MENTIDERS

Els trigènims Trónchez tenen el molest costum següent: cada vagada que se'ls hi fa una pregunta, dos d'ells diuen la veritat i l'altre diu mentida. Els hi vaig demanar quin dels tres havia nascut primer i em van contestar:
Perico: "*En Pepe va néixer el primer*"
Pepe: "*Jo no som el major*"
Pau: "*En Perico va néixer el primer*"

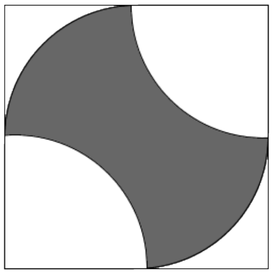
Quin dels tres va néixer primer?

6. CAP-I-CUES DE QUATRE XIFRES

Sabeu que és un nombre cap-i-cua?. Escriu cap-i-cues de quatre xifres i fixa't que tots són divisibles per 11. Per què?.

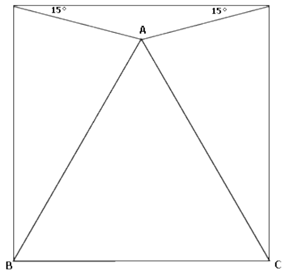
7. ÀREA I PERÍMETRE

Quina és l'àrea i quin el perímetre de la figura ombrejada?



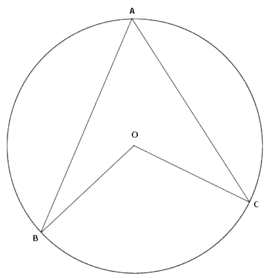
8. EQUILÀTER?

És equilàter el triangle ABC?

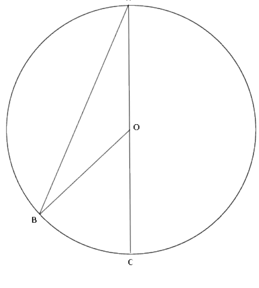


9. ANGLE INSCRIT

Es tracta de demostrar que l'angle BAC és la meitat de l'angle BOC



La demostració serà més senzilla si abans demostres el teorema per aquest cas particular



10. SUMES DE CONSECUTIUS

Alguns nombres es poden expressar com a suma d'una successió de nombres positius consecutius. Exactament, quins nombres tenen aquesta propietat?

11. LA CABRA FERMADA

Una cabra està fermada per una corda de 6 metres a un vèrtex d'una establa rectangular que amida 4x5 metres. L'establa està rodejada d'herba. En quina àrea pot pastar la cabra?

12. LA BERENETA

Cinc senyores berenen assegudes entorn d'una taula rodona. La senyora García està asseguda entre la senyora López i la senyora Martínez. Elena està asseguda entre Catalina i la senyora Pérez. La senyora López està entre Elena i Alícia. Catalina i Doris són germanes. Isabel està asseguda amb la senyora Gómez a la seva esquerra i la senyora Martínez a la dreta.

Col·loca els noms amb els corresponents llinatges.

13. ANIMALETS

Na Rosa col·lecciona dragons, escarabats i cucs. Té més cucs que dragons i escarabats junts. En total, té en la col·lecció dotze caps i vint-i-sis pates (dragons: 4 pates, escarabats: 6 pates, cucs: 0 pates).
Quants dragons té na Rosa?

14. BODEGA

Un senyor té distribuïdes les botelles de vi d'una petita bodega de la forma que indica el quadrat inferior. El senyor no se'n fia gaire del seu criat i cada nit abans d'anar-se'n a dormir baixa a la bodega a comptar les botelles. Per estalviar-se feina només compta els totals dels quatre costats del quadrat. Si és 21 es dóna per satisfet.

El criat, al qual li molesta que el senyor no se'n fiï d'ell decideix robar-li botelles sense que el senyor se'n doni compte. Com s'ho va fer?

6	9	6
9		9
6	9	6

15. DISSECCIÓ D'UN QUADRAT

Es diu que un nombre N és *agradable* si un quadrat es pot disseccionar en N quadrats que no es solapin. Quins són els nombres *agradables?*

16. MOBLES

S'ha de moure una butaca molt pesada i l'únic moviment possible és fer-la rotar 90º sobre una de les seves pates. Serà possible moure-la de manera que quedi exactament darrera d'on estava abans i mirant en el mateix sentit?

17. QUINZE

a) Es tracta de col·locar els nombres d'1 fins a 9 dins un quadrat tres per tres, de manera que la suma dels tres nombres de cada fila, cada columna i de les dues diagonals sigui 15.

b) Es col·loquen nou fitxes en una taula numerades de l'1 al 9. Dos jugadors van agafant alternativament una fitxa de la taula. El guanyador és el primer que aconsegueix tenir tres fitxes que sumen exactament 15.

18. DIFERÈNCIA DE QUADRATS

Quins nombres poden expressar-se com a diferència de dos quadrats perfectes?

19. REPARTINT CONJUNTS

Considerem el conjunt de n nombres $S_n=\{1,2,3,...,n\}$. Per a quins nombres naturals n es pot repartir S_n en dos conjunts distints tals que els seus elements sumin el mateix?.
Per exemple per 2 no es cumpleix perquè $S_2=\{1,2\}$ no es pot partir d'aquesta manera, però per 3 i 7 si, perquè $S_3=\{1,2,3\}$ es pot dividir com $\{1,2\}$ i $\{3\}$ i $S_7=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ com $\{1,6,7\}$ i $\{2,3,4,5\}$

20. PARELLES ESPECULARS

Si multiplicam dos nombres de dues xifres, en general el seu producte és diferent del que resulta si feim les seves imatges en un mirall. Així $25x43 \neq 34x52$.
En canvi, existeixen algunes parelles (els hi direm *especulars*) tals que el seu producte és el mateix que el de les seves imatges. Per exemple: 23x64=46x32.
Troba les parelles de nombres especulars. Tracta de trobar alguna regla que et permeti trobar totes les parelles especulars.

21. LA CASA DE L'AMIGA

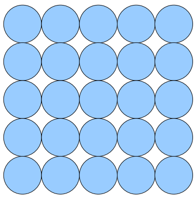
Una amiga s'ha comprat una parcel·la que té forma de triangle equilàter i que té per mitjera tres carreteres. On ha de construir la casa perquè en fer els tres camins que vagin de la casa a cada una de les carreteres li resulti el més econòmic possible?.

22. MATRIUS DE SIGNES

Els termes d'una matriu 100x100 són signes (+ o -). S'anomenarà opercaió elemental al canvi de tots els signes d'una mateixa fila o d'una mateixa columna. Al principi la matriu està composada de signes + exclusivament. ¿Es pot arribar a obtenir, mitjançant un nombre finit d'operacions, una matriu que tengui exclusivament 1970 signes - ?.

23. UNA MOSCA ESPECIAL

Sobre la taula has colocat tot un capital, 25 monedes de 500 ptes, d'aquesta forma:



Ve una mosca volant i es posa sobre una de les monedes. Se li acudeix que li agradaria passar per totes les monedes caminant, passant d'una moneda a una altra que la toqui i sense repetir monedes. Ho podrà fer?. Podries fer-li l'itinerari?.

24. ESTACIONS NOVES

En cada estació d'una xarxa ferroviària es venen tants bitllets diferents com estacions a les que es pot anar des d'una estació determinada o estacions des de les que es va a ella (el bitllet de A a B és diferent del de B a A). S'inaugura una nova línia amb diferents estacions i això obliga a imprimir 34 nous bitllets distints. Quantes estacions hi havia i quantes se n'han inaugurat?.

25. SUMES DE QUADRATS

Hem vist que, efectivament, el tauler d'escacs conté 204 quadrats, per calcular-los hem sumat, en una de les sol·lucions, $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2=204$. Record de quan estudiava, que la suma de quadrats consecutius admet una fórmula directa, és a dir, sabent el nombre de quadrats consecutius que he de sumar puc dir el valor d'aquesta suma substituint el nombre de quadrats a una fórmula. Vegem si podem trobar-la.
Record bé que era un producte de tres nombres dividit per 6.

26. PINTAR MAPES

Al llarg dels anys hi ha hagut problemes que han interessat fortament als matemàtics de tots els països. Molts d'ells han estat costosos de resoldre, com per exemple el Teorema de Fermat, que darrerament ha sortit per les notícies. Altres no s'han pogut resoldre, com per exemple el de trobar una fórmula que dóni tots els primers.
Un dels problemes que ha ocupat l'interès dels matemàtics ha estat el de saber el mínim nombre de colors necessaris que fan falta per pintar qualsevol mapa. Ara ens ocuparem d'aquest problema però dins un context més reduït.
Aagafa un quadrat i traça una recta que el divideixi en dues parts. Traça després més rcetes, arbitràriament distribuïdes, de manera que divideixin el quadrat en diferents regions o països. Volem pintar aquest mapa, de manera que dos països vesins han d'estar pintats de colors diferents. La pregunta és, quants colors diferents seran necessaris, com a mínim, per a pintar qualsevol distribució de països d'aquest tipus?.

27. PINTAR SENSE AIXICAR EL LLAPIS DEL PAPER

a) S'han d'unir nou punts, col·locats en una matriu 3x3, mitjançant quatre línies consecutives, sense aixicar el llapis del paper.

b) Problema dels Ponts de Königsberg.

c) Estudi dels grafs que es poden dibuixar amb un sol traçat sense repetir arestes.

28. JUGANT AMB MISTOS

És un joc per a dos jugadors: sobre una taula hi ha dos munts de mistos, amb 5 mistos cada un. Cada jugador, per torn, pot agafar un misto d'un munt o un misto de cada munt. Per el que agafa el darrer misto.

29. LES LLETRES DEL NIF

Es tracta d'analitzar com s'associen les lletres del NIF a cada un dels nombres del DNI. Es fa de forma aleatòria?.

30. TRES CIRCUMFERÈNCIES

Tres circumferències del mateix radi passen per un punt P. Demostra que els altres tres punts d'intersecció de cada dues circumferències estan sobre una circumferència de radi igual al de les tres primeres.

31. UN CAMÍ ENTRE P i Q

En el pla cartesià es consideren els punts P(8,2) i Q(5,11) i un mòbil es desplaça de P a Q segons un camí que de complir les següents condicions: El mòbil parteix de P i arriba a un punt de l'eix OX al llarg del qual recorre un trajecte de longitud 1; després es separa d'aquest eix i es dirigeix a un punt de l'eix OY al llarg del qual recorre un trajecte de longitud 2, es separa de l'eix i finalment es dirigeix al punt Q. Entre tots els camins possibles, determina el de longitud mínima, així com aquesta longitud.

32. UN CAMÍ ENTRE M i N

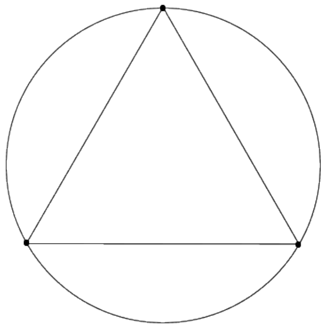
Donats dos punts M i N i una líia recta AB sobre un pla, troba un punt de la rceta AB tal que la suma de distàncies d'aquest punt a M i N sigui mínima.

33. CUB DE CUBS

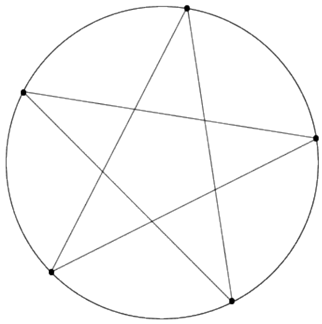
Tenc 8 cubs. Dos d'ells estan pintats de vermell, dos de blanc, dos de blau i dos de groc. Vull acoplar-los per formar un cub més gran, de manera que apareguin en cada cara tots els colors. De quantes maneres diferents puc col·locar els cubs?

34. FERMANT CLAUS

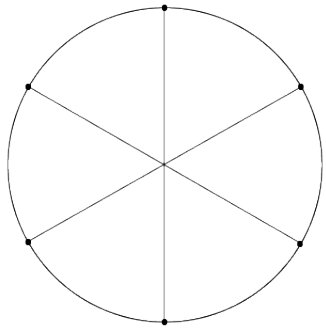
Es claven un cert nombre de claus a la vora d'un cercle. Es ferma un fil a un dels claus i es passa entorn d'un segon clau, de manera que quedi tensat. Llavors es passa per un tercer clau, de manera que el salt entre le primer i el segon clau, en el sentit de les agulles del rellotge, sigui igual al salt entre el segon i el tercer, com es mostra en els exemples:



3 claus, salt 1



5 claus, salt 2



6 claus, salt 3

El procés continua, conservant sempre el mateix salt en el sentit de les agulles del rellotge, fins que s'aconsegueix el primer clau una altra vegada. Si hi ha algun clau que no s'ha emprat encara, el procés comença una altra vegada partint d'ell.
Amb 5 claus i un salt de 2 es necessita només un tros de fil, mentre que amb 6 claus i un salt de 3 es necessiten tres fils. Quants trossos de fil es necessitaran en general?.

35. EL SALT DE LA GRANOTA

Deu clavies de dos colors, cinc de cada color, estan situades en una línia d'onze forats, les cinc negres a un costat, les cinc blanques a l'altre i el forat d'emmig buit. Es volen intercanviar les clavies blanques i les negres, però només es permet moure les clavies a un forat buit adjacent o saltar sobre una clavia a un forat buit darrera d'ella. És possible fer l'intercanvi?.

36. QUE QUEDA DE BABA?

Trobar dues xifres A y B, diferents entre si, tals que el nombre de la forma BABABA sigui múltiple de AAA, de BBB i de AB. En canvi, BA no és múltiple de B.

37. TALLS SUCCESSIUS

Un nombre enter s'escriu amb tres xifres diferents. D'aquest nombre n'obtenim uns altres tres de la següent forma: el primer suprimint la xifra de les centenes, el segon suprimint la xifra de les desenes i el tercer suprimint la xifra de les unitats. La suma d'aquests tres nombres és igual a la meitat del nombre de partida. Troba el nombre.

38. EL MISTERI DE RAVENSDENE PARK

Dudeney: el genio de los problemas de ingenio

El inglés Henry Ernest Dudeney (1847-1930) fue el más genial inventor de problemas de ingenio que haya existido. Hasta el día de hoy sus creaciones siguen alimentando a cuanta sección de pasatiempos se publica en el mundo, aunque en la mayoría de los casos no se hace mención a su nombre.

Dudeney poseía una destreza matemática fuera de serie, ya sea para armar problemas como para descubrir el atajo ingenioso que los resuelve. Los conocimientos de matemática los adquirió por su cuenta, no habiendo asistido jamás al colegio. Inició su carrera profesional de inventor de problemas en la revista inglesa Tit-Bits, y la prosiguió en diversas publicaciones. Durante veinte años condujo una página de entretenimientos, «Perplejidades», en The Strand Magazine. En un reportaje que le hicieron, Dudeney relató cómo su oficio le permitió salvar a una chica de la deshonra. Es una historia divertida. En la sección de correspondencia «sentimental» de un diario londinense había aparecido un mensaje en código que un hombre le enviaba a una joven solicitándole que se encontrara con él sin que los padres de ella lo supieran. Dudeney descifró el mensaje e hizo poner en esa sección otro para la joven, escrito en el mismo código, que decía: «No confíe en él. No pretende nada bueno. Un benefactor.» A esto siguió un mensaje en código enviado por la chica a «un benefactor», agradeciéndole el consejo.

A continuación presentamos una pequeña selección de problemas de este maestro del ingenio.

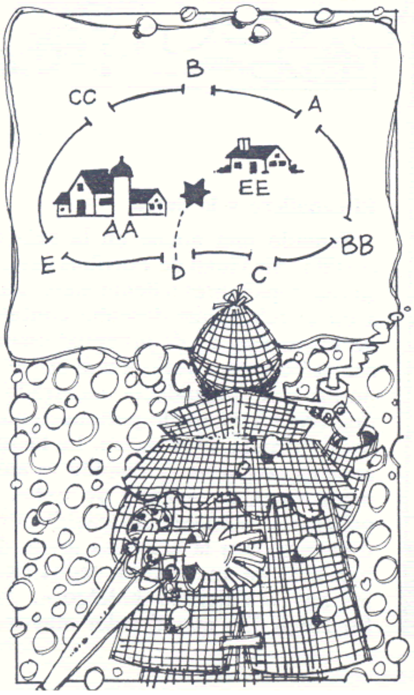
El misterio de Ravensdene Park

El misterio de Ravensdene Park, que ahora les contaré, fue un asunto grave, ya que involucró el asesinato de Cyril Hastings junto a su casa de campo, no lejos de Londres.

El 17 de febrero, a las 11 de la noche, cayó una fuerte nevada y aunque sólo duró una media hora, la tierra quedó cubierta por una gruesa capa de nieve. El señor Hastings había pasado la velada en casa de un vecino y salió a medianoche para dirigirse a su hogar. Iba a pie y tomó el camino más corto, a través de Ravensdene Park, desde el portón **D** hacia el **A**, como se muestra en el plano adjunto. Pero a la mañana siguiente fue hallado muerto, en el punto señalado por una estrella en nuestro plano, apuñalado en el corazón. Los siete portones fueron clausurados de inmediato, y se examinaron las huellas sobre la nieve. Afortunadamente eran muy nítidas y la policía obtuvo los siguientes datos:

— Las huellas del Sr. Hastings eran inconfundibles, iban derecho desde **D** hasta el sitio donde fue encontrado.

— Había huellas del guardián del parque, que se echó a dormir cinco minutos antes de la medianoche, luego de haber ido desde **E** hasta **EE**.



Estaban las huellas del jardinero, desde **A** hasta **AA**. Otras huellas revelaban que un individuo había entrado por el portón **B** y salido por el **BB**, mientras que otro había entrado por **C** y salido por **CC**. Unicamente estas cinco personas habían entrado al parque desde la nevada.

— La noche había sido de mucha niebla y, en consecuencia, algunos de estos caminantes habían hecho recorridos muy sinuosos, pero es de destacarse que ningún recorrido pasaba sobre otro. La policía estaba segura de este hecho, pero actuó estúpidamente y nadie llegó a hacer un croquis de estos recorridos antes de que la nieve se hubiera derretido, borrando toda huella.

El misterio fue expuesto ante los miembros del **Puzzle Club**, quienes de inmediato se consagraron a la tarea de resolverlo. ¿Era posible descubrir al autor del crimen? ¿Fue el guardián? ¿El jardinero? ¿Acaso el hombre que entró por **B** y salió por **BB**? ¿O el hombre que entró por **C** y salió por **CC**? Se proveyeron de planos y diagramas, como el que mostramos aquí, que reproducían en forma simplificada Ranvensdene Park, pero sin alterar las condiciones del problema.

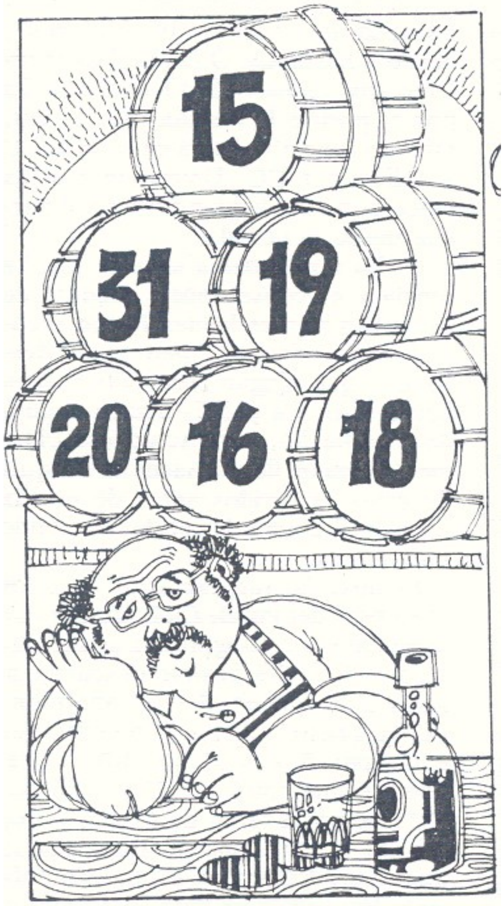
Luego, los miembros del **Puzzle Club** procedieron a trazar las rutas de cada persona, de acuerdo a los datos seguros de la policía. Pronto se hizo evidente que, como ninguna ruta pasaba sobre otra, algunas resultaban muy enredadas. Pero cuando se registraron todos los caminos posibles, no tuvieron la menor dificultad en decidir cuál había sido el recorrido del asesino; y la policía, que conocía la identidad de todos los sospechosos, dio la orden de arresto y el hombre fue condenado.

¿Puede el lector descubrir quién cometió el crimen, si **A, B, C** o **E**? Simplemente trace las rutas de cada una de estas cuatro personas, y la clave del misterio le será revelada.

39. EL BARRIL DE SERVESA

El barril de cerveza

Un hombre adquirió cinco barriles de vino y un barril de cerveza. En el dibujo, cada barril tiene marcado su contenido en litros. Vendió luego una cantidad de vino a un cliente y el doble de esta cantidad a otro, y ya sin que le quedara más vino, se guardó para sí el barril de cerveza. El problema es, ahora, descubrir cuál es el barril de cerveza. ¿Puede usted determinarlo? Por supuesto, el hombre vendió los barriles tal como los había comprado, sin trasegar ni cambiar para nada sus contenidos.



40. TRIANGLES D'OR


NO SE VA A DAR CUENTA DE NADA. LE DEJÉ ARMADO OTRO LINDO TRIÁNGULO
YO TAMBIÉN VOY A ARMAR UN TRIÁNGULO. NO SERÁ TAN GRANDE, COMO EL QUE LE DEJÉ AL CONDE, PERO ME VA A ALCANZAR JUSTO PARA COMPLETAR UNO
CALVET NO TARDARÁ EN DORMIRSE... ES MI OPORTUNIDAD
MAYORDOMO
SE VA A DAR CUENTA SI ES BRUJO: LE DEJÉ ARMADO OTRO LINDO TRIÁNGULO
JA, NO SERÁ TAN GRANDE COMO EL QUE LE DEJÉ A CALVET, PERO YO TAMBIÉN TENGO JUSTO PARA HACERME MI TRIÁNGULO
SABIENDO QUE EL CONDE TRAJO AQUELLA NOCHE MENOS DE 300 MONEDAS, DEDUZCA LA CANTIDAD EXACTA
FORTIN

41. EL TEOREMA DE PITÀGORES

Demostració 1

1. Demostra que els quatre triangles són iguals
2. Calcula l'àrea del quadrat exterior a partir de la longitud d'un costat
3. Calcula l'àrea del quadrat exterior a partir de la suma de les àrees del quadrat interior i la dels quatre triangles
4. Igualant les àrees obtingudes a 2 i 3 demostra el teorema

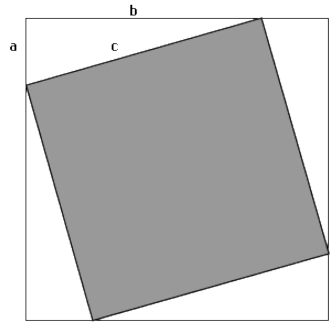


fig 1

Demostració 2

1. Demostra que els quatre triangles de la figura 1 són iguals
2. Demostra que a partir de la figura 1 es pot aconseguir la figura 2
3. Compara les àrees de la figura 1 i la figura 2 i demostra el teorema

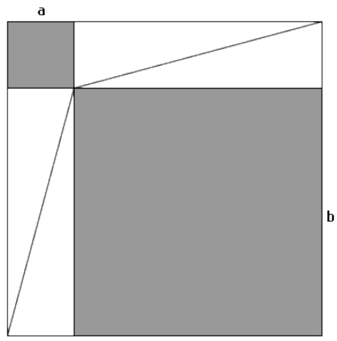


fig 2

Demostració 3

1. Comprova que els quatre triangles són iguals
2. Comprova que l'amida del quadrat interior és b-a
3. Calcula l'àrea del quadrat exterior a partir de l'amida del costat
4. Calcula l'àrea del quadrat exterior a partir de la suma de les àrees del quadrat interior i la dels quatre triangles.
5. Igualant les àrees obtingudes a 3 i 4 demostra el teorema

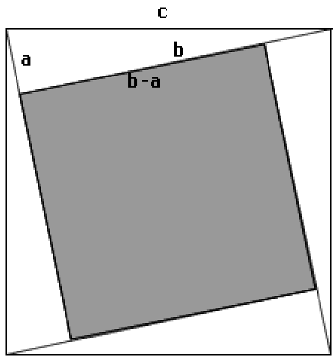


fig 3

Demostració 4

1. Demostra que els quatre triangles de la figura 1 són iguals
2. Justifica els següents passos: àrea KCOM – àrea dels quatre triangles = àrea DFHI - àrea dels quatre triangles = àrea DFHI – àrea ACBI -àrea CEFG = àrea ADEC + àrea BCGH
3. Així queda demostrat el teorema

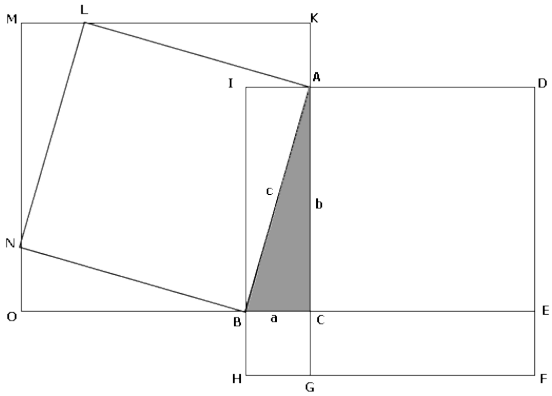


fig 4

Demostració 5

1. Demostra que els quatre triangles de la figura 1 són iguals
2. Comprova que de la figura 1 es pot passar a la figura 5. Posa mides.
3. Demostra el teorema

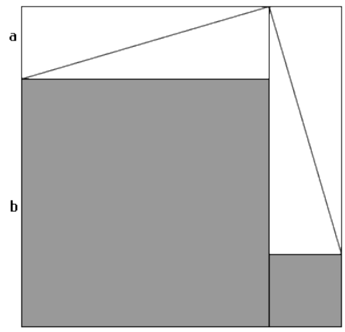


fig 5

Demostració 6

1. Comprova que la divisió que hem fet al quadrat de la figura 6 es correspon amb la divisió que hem fet a la figura 7
2. Demostra el teorema

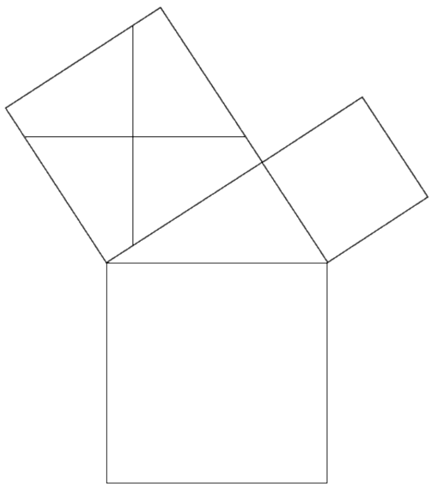


fig 6

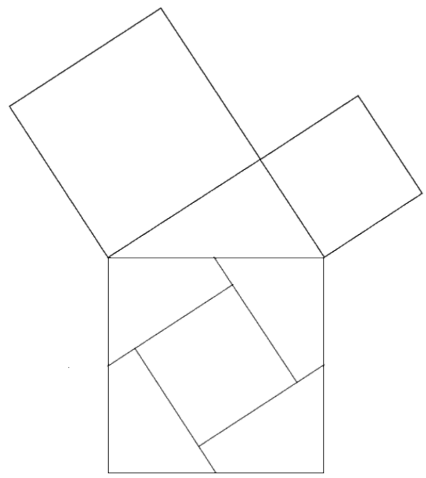


fig 7